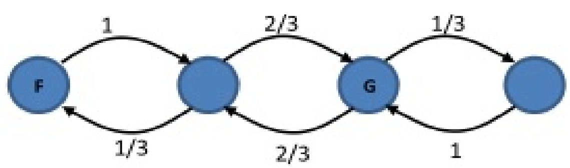
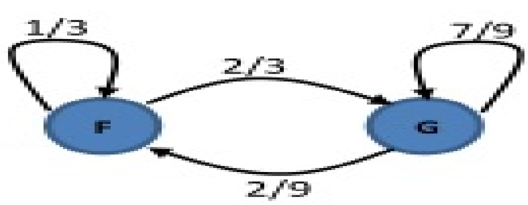
XXII Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2019

1. (3 puntos). Una hormiga camina sobre la superficie de un octaedro regular. Durante cada minuto, la hormiga se desplaza con la misma probabilidad a alguna de las caras adyacentes a la cara en la que se encuentra. Si la hormiga emipeza en la cara F ¿Cuál es la probabilidad que vuelva a estar en la misma cara F después de n minutos?

   Solución Decimos que una cara está a distancia d si se necesitan exactamente d pasos para llegar de F a esa cara. Llamamos capa al conjunto de caras que tienen la misma distancia a F. Entonces, cada vértice de la gráfica representa una capa del octaedro. Es inmediato que de las caras en la capa uno, solo se puede pasar a la capa cero o a la capa 2, etc. Así, primer nodo, distancia=0, segundo nodo, distancia=1, etc. De tal forma que el diagrama de transición es:

   No se puede regresar a F después de un número impar de minutos. Considerando solo un número par de mintuos, se tiene el siguiente diagrama de transición:

   Si $f(m)$ es la probabilidad de estar en la cara F después de $2m$ minutos, es claro que:

   $f(m) = 1/3f(m-1) + 2/9(1 - f(m-1)) = 2/9 + 1/9f(m-1)$

   $f(m) \cdot 1/4 = 1/9(f(m-1) \cdot 1/4)$

   entonces $g(m) = f(m) \cdot 1/4$ es una serie geométrica con razón $1/9$, donde $g(0) = 3/4$.

   $f(m) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \times 3^{2m}}$

   Respuesta: $f(n) = 0$ si n es impar $f(m) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \times 3^{n}}$ si n es par.

2. (4 puntos). Demostrar que el conjunto $\{\sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n/n^2 : \varepsilon_n \in \{0,1\}\}$ es un intervalo.

Solución

Vamos a demostrar que si $x \in [0, \sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2]$ entonces existe una elección de signos tal que $x = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n/n^2$. Hacemos esta elección inductivamente: sea $x_1 = 0$, y para $n \geq 2$ definimos

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} & \text{si } \; x < x_{n-1} + 1/n^2, \\ x_{n-1} + 1/n^2 & \text{si } \; x \geq x_{n-1} + 1/n^2, \end{cases}$$

es decir,

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < x_{n-1} + 1/n^2, \\ 1 & \text{si } \; x \geq x_{n-1} + 1/n^2, \end{cases}$$

La sucesión $\{x_n\}$ es creciente y por inducción es fácil probar que está acotada superiormente por x. Vamos a demostrar que

$$x - x_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Para $n = 1$ es claro. Supongamos que es cierto para n. Tenemos dos casos: $x < x_n + 1/(n+1)^2$ o $x \geq x_n + 1/(n+1)^2$. En el primer caso obtenemos que

$$x - x_{n+1} = x - x_n < \frac{1}{(n+1)^2}.$$

En el segundo caso, por hipótesis inductiva tenemos que

$$x - x_{n+1} = (x - x_n) - (x_{n+1} - x_n) \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Para probar esto observamos que

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+2} > \frac{1}{(n+1)^2},$$

donde la última desigualdad es válida para $n \geq 1$. Con esto concluimos que $x_n \to x$, es decir, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n/n^2$, como queríamos.

3. (4 puntos). Sean r, s reales positivos tales que $2 < \frac{r}{s}$. Demostrar que la desigualdad

$$\frac{a^r - b^r}{a^s - b^s} + \frac{b^r - c^r}{b^s - c^s} + \frac{c^r - a^r}{c^s - a^s} \leq \frac{r}{s}(a^{r-s} + b^{r-s} + c^{r-s}),$$

es válida para cualesquiera reales positivos distintos a, b, c.

Solución

Supongamos entonces que $2 \leq r/s$. Observamos que

$$\frac{x^r - y^r}{x^s - y^s} \leq \frac{r}{2s}(x^{r-s} + y^{r-s}) \Longleftrightarrow \frac{(r-2s)(x^r - y^r) - rx^s y^s(x^{r-2s} - y^{r-2s})}{x^s - y^s} \geq 0$$

Para y fijo, consideramos las funciones

$$f(x) := (r-2s)(x^r - y^r) - rx^s y^s(x^{r-2s} - y^{r-2s}), \quad g(x) := x^s - y^s,$$

de manera que $f(y) = g(y) = 0$, $g'(x) = sx^{s-1} > 0$ y

$$f'(x) = r(r-2s)x^{r-1} - r(r-s)x^{r-s-1}y^s + rsx^{s-1}y^{r-s} = rx^{s-1}[(r-2s)x^{r-s} + sy^{r-s} - (r-s)x^{r-2s}y^s].$$

Notamos que $f' \geq 0$ por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica. Por el teorema del valor medio de Cauchy obtenemos que existe z entre x, y tal que

$$\frac{(r-2s)(x^r - y^r) - rx^s y^s(x^{r-2s} - y^{r-2s})}{x^s - y^s} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \geq 0,$$

como queríamos probar. La desigualdad se concluye al sumar la desigualdad sobre los pares (a, b), (b, c) y (c, a).

4. (5 puntos). Sean $n > m > 0$ enteros primos relativos, pruebe que el polinomio

$$Q(x) = mx^n - nx^m + n - m$$

tiene exactamente $m - 1$ raices dentro del círculo unitario.

Solución Primero mostramos el siguiente lema

Lema Sean $n > m > 0$ dos enteros. Si $|B| > |A| + |C|$, entonces el polinomio $Az^n + Bz^m + C$ tiene exactamente m ceros dentro del cículo unitario.

Demostración Consecuencia inmediata del Teorema de Rouche.

Entonces, sean $a, b,\ c$ números reales. Por el lema, se sabe que para cada $c > 0$ el polinomio $P_c(x) = bx^n - ax^m + a - b - c$ tiene exactamente m raíces dentro del círculo unitario.

Suponiendo que $z_1,\ \ldots, z_m$ son las raices de $P_c(x)$ que están exactamente dentro del círculo unitario. Cuando c tiende a cero, es posible que algunas de estas raíces queden en el círculo. Ahora probemos el siguiente lema:

Lema, Sean $b > a$, entonces el polinomio $mx^n - nx^m + n - m$ tiene exactamente $\gcd(m,n)$ raíces en el círculo unitario.

Proof. Sean $|z| = 1$ y $mz^n - nz^m = m - n$, entonces, mz^n es un punto en el círculo $|z| = m$, y nz^m es un punto en el círculo $|z| = n$. Como la longitud del segmento entre esos puntos es $m - n$ y su argumento es cero, se tiene que

$$m\text{Arg}\,(\text{z}) \equiv n\text{Arg}\,(\text{z}) \equiv 0\,(mod\ 2\pi)\,.$$

Entonces,

$$\gcd\,(m,n)\ \text{Arg}\,(\text{z}) \equiv 0\,(mod\ 2\pi)\,.$$

Es decir $z^{\gcd(m,n)} = 1$. Por otro lado, si $z^{\gcd(m,n)} = 1$, entonces $mz^n - nz^m = m - n$. Ahora, supongamos que z_i tiende a z con $z^{\gcd(m,n)} = 1$. Como $P'(z) = mnz^{m-1}\left(z^{n-m} - 1\right)$, se tiene que z tiene multiplicidad 2. Ahora, sea $t = rz,\ r > 0,\ f(r) = P_c(t) = mr^n - nr^m - m + n - c$. Es facil ver que $f(r)$ tiene dos ceros postivios, mientras que $f'(r)$ tiene solo un cero positivo $r' = 1$; además cuando c tiende a cero, la función $f(r)$ tiene un cero $r_0 \in (0,\ 1)$. Además, para $r > r_0$ la función $f(r)$ permanece negativa. Entonces, si c tiende a cero, hay un cero exterior y un cero interior que se juntan en el círculo unitario. Con esto completamos la prueba del lema.

Regresando al problema, hay a lo más $\gcd(m,n)$ raíces entre $z_1,\ \ldots, z_m$ que podrían estar en el círculo unitario. Entonces al menos se tienen $m - 1$ raíces dentro del círculo. Entonces, tiene a lo más $n - m + 1$ raíces fuera del círculo.

Ahora, consideremos el polinomio $x^n Q\left(\frac{1}{x}\right) = (n-m)\,x^n - nx^{n-m} + n - (n-m)$. De nuevo, tiene al menos $n - m - 1$ raíces estrictamente dentro del círculo. Entonces, el polinomio $Q(x)$ tiene al menos $n - m - 1$ raíces fuera del círculo. Porque tiene un doble cero en $z = 1$. Entonces, el polinomio $Q(x)$ tiene exactamente $m - 1$ raíces dentro del círculo.

5. (6 puntos). Sea $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la función tal que $\sigma(1) = 1$, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ para cualesquiera m, n enteros positivos y, si $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < ...$ son los primos listados em orden creciente, entonces $\sigma(p_k) = p_{k+1}$, para todo $k \geq 1$. Determine el supremo del conjunto $Y = \{\alpha > 0|$ existen infinitos $n \geq 1$ tales que $\sigma(n) \geq n^\alpha\}$.

   Solución Note que $\sigma(2^n) = (\sigma(2))^n = 3^n = (2^n)^{\log 3/\log 2}$, y luego $\tau = \log 3/\log 2$ es un elemento de Y. Vamos a probar que es su mÃ¡ximo. Para esto, es suficiente probar que $\sigma(p) \leq p^\tau$ para todo primo p - de hecho, de ahi sigue que, si $n = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_k^{\gamma_k}$, entonces $\sigma(n) = \sigma(p_1)^{\gamma_1}\sigma(p_2)^{\gamma_2}\ldots\sigma(p_k)^{\gamma_k} \leq (p_1^\tau)^{\gamma_1}(p_2^\tau)^{\gamma_2}\ldots(p_k^\tau)^{\gamma_k} = n^\tau$.

   Note que, como $3^2 > 2^3$, tenemos $\tau = \log 3/\log 2 > 3/2$. Como $3^3 > 5^2$, tenemos $\sigma(p_2) = p_3 = 5 < 3^{3/2} = p_2^{3/2} < p_2^\tau$. Y, para $j \geq 3$, $p_j \geq 5$ y $p_j^\tau > p_j^{3/2} > 2p_j > p_{j+1} = \sigma(p_j)$ (por el postulado de Bertrand), lo que concluye la prueba.

6. (7 puntos) Sea C una circunferencia de radio 1. Si A_1, A_2, A_3 son tres puntos en el interior del disco cuya frontera es C, definimos las transformaciones $T_i : C \to C$ para $i = 1, 2, 3$, como $T_i(P)$ es el punto donde la recta $\overline{PA_i}$ vuelve a intersecar al círculo C. Demostrar que la transformación $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ tiene exactamente 0, 1 ó 2 puntos fijos.

Solución Denotamos por $P(A_k)$ la potencia del punto A_k con respecto a C y D el disco abierto cuyo borde es C. Cada transformación T_k puede extenderse a $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ como $T_k = R_k \circ I_k$ donde

$$I_k(z) = A_k + \frac{P(A_k)^2}{\overline{(z - A_k)}}$$

Inversión sobre la circunferencia de centro A_k y radio $P(A_k)$

$$R_k(z) = \begin{cases} 2A_k - z & \text{si } A_k \in D, \\ z & \text{si } A_k \in \mathbb{R}^2 - \overline{D}. \end{cases} \tag{1}$$

Es decir que la composición $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ se extiende a una transformación de la forma

$$T(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$$

En general, el conjunto de los puntos fijos de T en el plano puede ser una circunferencia, una recta, o un conjunto de a lo sumo dos puntos. Para concluir basta con verificar que $T : C \to C$ no es la identidad para lo cual tomamos $P \in C \cap A_1A_2$ tal que $T_2 \circ T_1(P) = P$ y por lo tanto $T(P) = T_3(P) \neq P$.

7. (7 puntos). Dados un entero positivo n y una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de enteros positivos, definimos

   $K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ recursivamente por:

   - Para $n = 0$: $K() = 1$.
   - Para $n = 1$: $K(a_1) = a_1$.
   - Para $n \geq 2$: $K(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_n \cdot K(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + K(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$.

   Así, por ejemplo, $K(a_1, a_2) = a_2 \cdot K(a_1) + K() = a_2 \cdot a_1 + 1$.

   Decimos que un entero positivo m es *sólido* si existen un entero positivo n y una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con uno de sus términos igual a 2 y los otros $n-1$ iguales a 1 tales que $m = K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Por ejemplo, $K(1, 2, 1) = 1 \cdot K(2, 1) + K(1) = 2 \cdot 1 + 1 + 1 = 4$ es sólido. Sea S el conjunto de los enteros positivos sólidos.

   (i) Pruebe que existen enteros positivos m arbitrariamente grandes tales que $S \cap [m, 4m/3] = \emptyset$.

   (ii) Pruebe que existen enteros positivos m arbitrariamente grandes tales que $|S \cap [m, 4m/3]| \geq \log m$.

   Obs.: En (ii), log denota el logaritmo natural.

   Solución

   Sea (F_n) la sucesión de Fibonacci dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \geq 1$, y sea $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número de oro. Tenemos $F_n = (\phi^n - (-\phi^{-1})^n)/\sqrt{5}, \forall n \geq 0$. Supongamos que $1 \leq r \leq n$, $a_r = 2$ y $a_j = 1$, para todo j con $1 \leq j \leq n$ y $j \neq r$. Sea $m_s^{(r)} = K(a_1, a_2, \ldots, a_s) = F_{s+1}$, para $1 \leq s \leq n$. Tenemos $m_s^{(r)} = F_{s+1}$ para $1 \leq s \leq r-1$, $m_r^{(r)} = 2m_{r-1} + m_{r-2} = 2F_r + F_{r-1}$, $m_{r+1}^{(r)} = m_r + m_{r-1} = 3F_r + F_{r-1}$ (note que estas igualdades valen aun en el caso $r = 1$) y, en general, para $r \leq s \leq n$, $m_s^{(r)} = F_{s-r+3}F_r + F_{s-r+1}F_{r-1}$, como se puede probar facilmente por inducción en $s - r$.

Así, tenemos

$$m_n^{(r)} = F_{n-r+3}F_r + F_{n-r+1}F_{r-1} = (F_{n-r+2} + F_{n-r+1})F_r + F_{n-r+1}F_{r-1} = F_{n-r+2}F_r + F_{n-r+1}F_{r+1} =$$

$$\frac{1}{5}((\phi^{n-r+2} - (-\phi^{-1})^{n-r+2})(\phi^r - (-\phi^{-1})^r) + (\phi^{n-r+1} - (-\phi^{-1})^{n-r+1})(\phi^{r+1} - (-\phi^{-1})^{r+1})) =$$

$$\frac{1}{5}(2\phi^{n+2} + 2(-\phi^{-1})^{n+2} - (-1)^r\phi^{n-2r+2} - (-1)^{n-r+2}\phi^{2r-n-2} - (-1)^{r+1}\phi^{n-2r} - (-1)^{n-r+1}\phi^{2r-n}) =$$

$$\frac{2}{5}(\phi^{n+2} + (-\phi^{-1})^{n+2}) + \frac{(-1)^{n-r}}{5}(\phi^{2r-n-1} + (-\phi^{-1})^{n-2r+1}).$$

Al cambiar r por $n - r + 1$, el término $\frac{(-1)^{n-r}}{5}(\phi^{2r-n-1} + (-\phi^{-1})^{n-2r+1})$ queda invariante. Mientras r varia entre 1 y n, obtenemos así $\lceil n/2 \rceil$ términos $m_n^{(r)}$ distintos, que varian entre $-\frac{1+o(1)}{5}\phi^{n-3}$ y $\frac{1+o(1)}{5}\phi^{n-1}$, mientras el primer término es $\frac{2+o(1)}{5}\phi^{n+2}$. Por lo tanto, mientras r varia entre 1 y n, los $m_n^{(r)}$ asumen $\lceil n/2 \rceil$ valores distintos, que varian entre $(1 + o(1))\phi^n$ y $\frac{3\phi+1+o(1)}{5}\phi^n$. Como $\frac{3\phi+1}{5} < 6/5$ y $(6/5) \cdot (4/3) = 1,6 < \phi$, para $m = (\frac{6}{5} + o(1))\phi^n$, tenemos $S \cap [m, 4m/3] = \emptyset$, y, para $m = (\frac{9}{10} + o(1))\phi^m$, tenemos $m < (1 + o(1))\phi^n < \frac{3\phi+1+o(1)}{5}\phi^n < 4m/3$, y luego $[m, 4m/3] \supset \{m_n^{(r)}, 1 \leq r \leq n\}$. Así, $|S \cap [m, 4m/3]| \geq n/2 \geq \log m$ (de hecho, esto equivale a $n \geq 2\log m$ y a $e^n \geq m^2$, y vale para n grande pues $\phi^2 = \phi + 1 < e$ y $m^2 = (\phi^2 + o(1))^m$).